



قابل ذکر است، ریشه n ام یک عدد گویا می‌تواند گویا باشد و یا گنگ که تمامی عددهای گویا را می‌توان روی محور نشان داد؛ مثل ریشه سوم $\frac{8}{27}$. اما ریشه‌هایی که گنگ هستند، با اینکه جبری‌اند، اما تعدادی از آن‌ها قابل نمایش به صورت دقیق روی محور عددها نیستند؛ مانند ریشه سوم ۲.

برای نمایش ریشه دوم عددهای طبیعی از قضیه فیثاغورس کمک می‌گیریم و با رسم مثلث یا مثلث‌های قائم‌الزاویه به صورت متوالی، به طول وتر دلخواه می‌رسیم.

مثلاً برای نمایش پاره‌خطی به طول $\sqrt{5}$ روی محور می‌توان به این روش‌ها عمل کرد: چهار مثلث قائم‌الزاویه به ضلع‌های قائم ۱ واحد، و یا یک مثلث به ضلع‌های قائم ۲ و ۱. اکنون این سؤال پیش می‌آید که برای رسم این مثلث و یا مثلث‌ها، در ابتدای امر مثلث اولی را در چه جهتی باید رسم کنیم:

در اینجا از چهار مثلث استفاده می‌کنیم و در جهت‌های متفاوت رسم را انجام می‌دهیم.

همه معادلات چندجمله‌ای با ضرایب گویا را در نظر بگیرید.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

مجموعه همه جواب‌های این معادلات را عددهای جبری گویند؛ چه حقیقی و چه موهومی. مثلاً ریشه‌های معادله $x^2 + 1 = 0$ با اینکه حقیقی نیستند (موهومی - مختلط)، ولی جبری نامیده می‌شوند.

بنابراین تمامی عددهای گویا جبری هستند، زیرا با فرض $x = \frac{m}{k}$ که در آن m و k دو عدد صحیح هستند و $k \neq 0$ است، داریم:

$$x = \frac{m}{k} \Rightarrow kx = m \Rightarrow kx - m = 0$$

که نشان می‌دهد، هر عدد گویا یک عدد جبری است.

همچنین ریشه n ام یک عدد گویا نیز جبری است؛ یعنی:

$$x = \sqrt[n]{\frac{m}{k}} \text{ زیرا:}$$

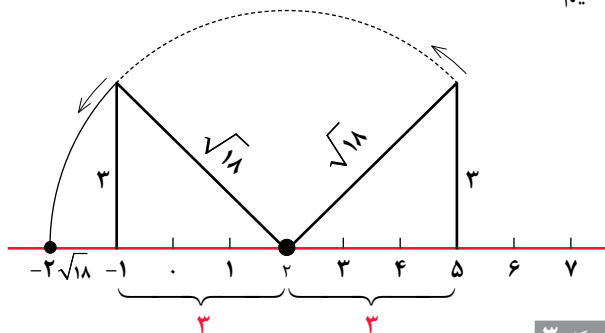
$$x = \sqrt[n]{\frac{m}{k}} \Rightarrow x^n = \frac{m}{k} \Rightarrow kx^n - m = 0$$

(که در آن $k \neq 0$ و اگر n یک عدد زوج باشد، m و k هم‌علامت هستند)

مثلاً برای نمایش عدد $2 - \sqrt{18}$ ، اگر از رسم دو مثلث در دو جهت مختلف استفاده کنیم، هیچ تفاوتی ایجاد نمی‌کند. برای نمایش این عدد، مکان عدد ۲ روی محور مشخص است و کافی است وتری به طول $\sqrt{18}$ پیدا کنیم. پس ابتدا ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} 18 &: \rightarrow 9 + 9 \Rightarrow \text{یک مثلث به ضلع‌های قائم ۳ و ۳} \\ 18 &: \rightarrow 16 + 1 + 1 \Rightarrow \text{دو مثلث به ضلع‌های قائم ۴ و ۱ و ۱} \\ 18 &: \rightarrow \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{18} \Rightarrow \text{هفده مثلث به ضلع‌های قائم ۱} \end{aligned}$$

راحت‌تر این است که مثلث‌هایی به ضلع‌های قائم ۳ و ۳ رسم کنیم.



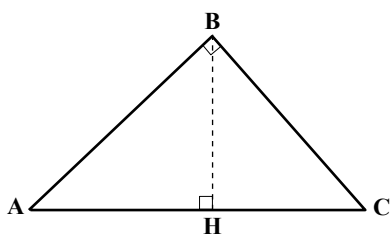
شکل ۳

همان‌طور که در شکل ۳ ملاحظه کردید، چه مثلث را در سمت راست عدد ۲ و یا در سمت چپ عدد ۲ رسم کنیم، نهایتاً کمان به سمت چپ که زده شود، هر دو یک جایگاه را نمایش می‌دهند. اگر به دانش‌آموز آزادی عمل دهیم، این موضوع را به صورت مفهومی می‌آموزد. اما اگر قید و شرط قرار دهیم، دچار سردرگمی می‌شود و حفظی به این کار می‌پردازد.

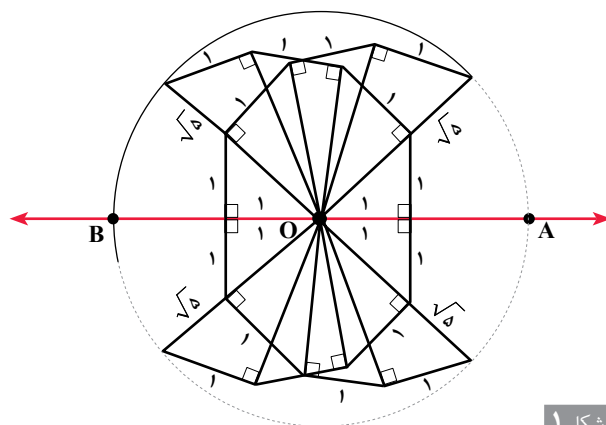
اکنون می‌خواهیم جایگاه عدد جبری $\sqrt[4]{2}$: (ریشه چهارم عدد ۲) را روی محور اعداد حقیقی پیدا کنیم:

از خواص طولی مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم (شکل ۴).

$$|BH|^2 = |AH| \cdot |HC| \Rightarrow |BH| = \sqrt{|AH| \cdot |HC|}$$



شکل ۴

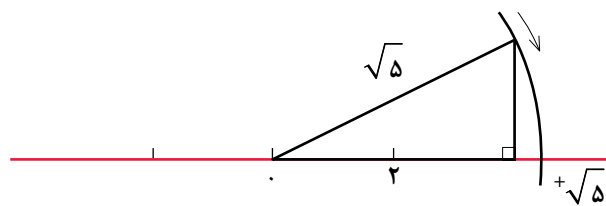


شکل ۱

اگر دقت کنیم، آخر وتر در هر جهت برابر با شعاع دایره و به طول $\sqrt{5}$ است. پس طول پاره‌های OA و OB نیز مساوی $\sqrt{5}$ است. اگر O مبدأ مختصات باشد، A نشان‌دهنده عدد $+\sqrt{5}$ و B نشان‌دهنده عدد $-\sqrt{5}$ است. بنابراین، برای نمایش این عددها، سوزن پرگار را روی نقطه آغاز رسم مثلث‌ها می‌گذاریم و دهانه پرگار را به اندازه آخرین وتر باز می‌کنیم. اگر علامت رادیکال مثبت باشد، به جهت راست کمان می‌زنیم و اگر علامت رادیکال منفی باشد، به سمت چپ.

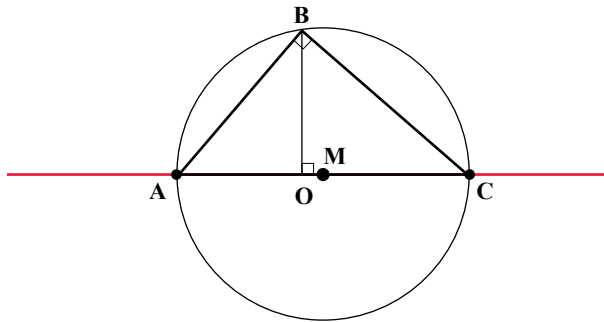
البته رسم مثلث یا مثلث‌ها در هر جهتی می‌تواند باشد و تأثیری روی علامت رادیکال ندارد. اما به اشتباه رایج شده است، برای نمایش $+\sqrt{5}$ از مبدأ به سمت راست مثلث‌ها را رسم کنیم و برای $-\sqrt{5}$ به سمت چپ.

در توجیه این امر گفته‌اند، زمانی که مثلث‌ها را به سمت راست رسم می‌کنیم، انتهای آخرین وتر به عدد روی محور نزدیک‌تر است و کمان کوچک‌تری باید زد. برای منفی هم همین‌طور است. در حالی که اگر به شکل ۱ دقت کنیم، مثلث‌هایی که به سمت راست رسم کرده‌ایم، آخرین وتر از جایگاه نقطه A که نشان‌دهنده $+\sqrt{5}$ است، بیشتر فاصله گرفته است. توجیه مزبور زمانی برای $+\sqrt{5}$ کارساز است که با یک مثلث به ضلع‌های ۱ و ۲ رسم شود (مانند شکل ۲).



شکل ۲

گام ۳. دایره‌ای به مرکز M و شعاع MA رسم می‌کنیم (شکل ۸). اکنون هر نقطه از دایره را اختیار کنیم و به دو نقطه A و C وصل کنیم، مثلث قائم‌الزاویه‌ای به قطر $1 + \sqrt{2}$ ایجاد می‌شود.

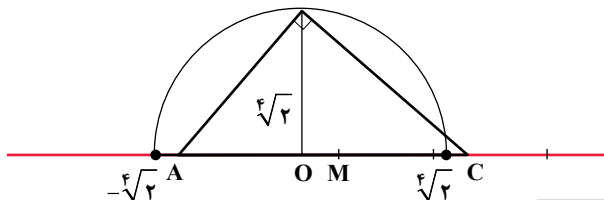


شکل ۸

اما با توجه به اینکه ارتفاع وارده‌ای می‌خواهیم که قطر را به دو قسمت ۱ و $\sqrt{2}$ تقسیم کند، باید پای ارتفاع مبدأ مختصات باشد:

$$|OB|^2 = |AO| \times |OC| \Rightarrow |OB|^2 = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \\ \Rightarrow |OB| = \sqrt{\sqrt{2}} \Rightarrow OB = \sqrt[4]{2}$$

اکنون با زدن کمان در سمت راست مبدأ، عدد $\sqrt[4]{2}$ را روی محور نشان می‌دهیم و با زدن کمان در سمت چپ مبدأ، عدد $-\sqrt[4]{2}$ را به نمایش می‌گذاریم (شکل ۹).

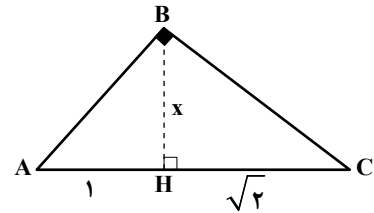


شکل ۹

اما عددی را که جبری نباشد، «عدد متعالی»، «ترافرازنده» یا «غیرجبری» می‌نامیم. نمونه‌هایی از عددهای ترافرازنده، «عدد پی» (π) و «عدد اولر» (e) هستند. تاکنون نمونه‌های کمی از عددهای ترافرازنده شناخته شده‌اند، چرا که اثبات ترافرازنده بودن یک عدد دشوار است. با این حال شمار آن‌ها کم نیست و تقریباً همه عددهای موهومی و حقیقی ترافرازنده شمرده می‌شوند.

نخستین اثبات وجود عددهای ترافرازنده را جوزف لیویل، ریاضی‌دان فرانسوی، در سال ۱۸۴۴ ارائه داده است. آیا می‌توان عددهای متعالی را با پرگار به دقت رسم کرد؟ در همین مقاله ذکر شد، حتی برخی عددهای جبری را نمی‌توان به صورت دقیق روی

$$x = \sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2} \times 1} \Rightarrow$$

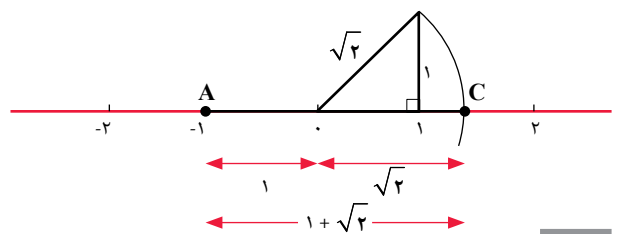


شکل ۵

حال برای رسم دقیق مثلث قائم‌الزاویه شکل ۵ به رأس قائم B ، از زاویه محاطی استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که اندازه زاویه محاطی روبه‌رو به قطر دایره ۹۰ درجه است. پس کافی است یک دایره به قطر $1 + \sqrt{2}$ رسم کنیم.

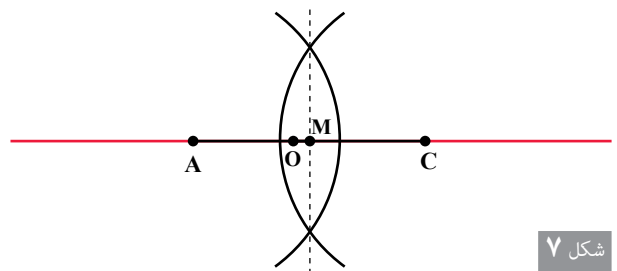
برای رسم این دایره، باید پاره‌خط AC را به طول $1 + \sqrt{2}$ روی محور مشخص و سپس مرکز دایره را این قطر پیدا کنیم. برای رسم پاره‌خط به طول $1 + \sqrt{2}$ و پیدا کردن وسط پاره‌خط (نقطه M) مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

گام ۱. برای رسم پاره‌خط به طول $1 + \sqrt{2}$ ، شروع کار از مبدأ مختصات است. اما جهت رسم مهم نیست و فقط طول پاره‌خط اهمیت دارد. یعنی می‌توان ۱ واحد از مبدأ به سمت راست رفت و $\sqrt{2}$ واحد از مبدأ به سمت چپ، و یا برعکس. در شکل ۶، ۱ واحد به سمت چپ مبدأ حرکت می‌کنیم و $\sqrt{2}$ واحد به سمت راست مبدأ مختصات می‌رویم.



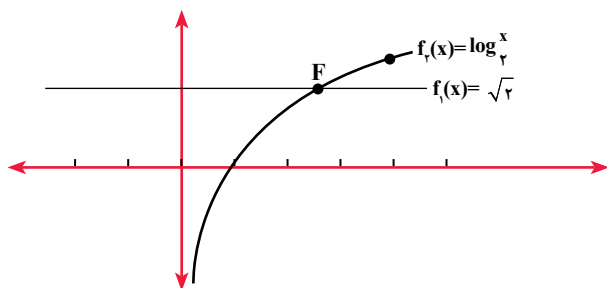
شکل ۶

گام ۲. حال عمود منصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم تا نقطه وسط پاره‌خط را پیدا کنیم و آن را M می‌نامیم (شکل ۷).



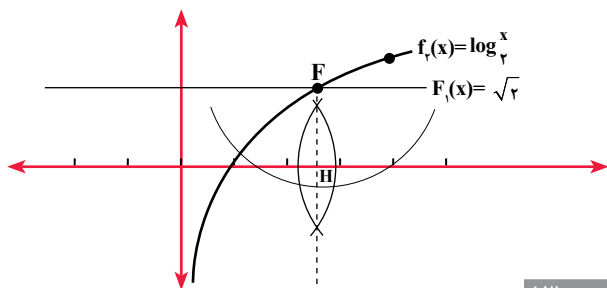
شکل ۷

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2



شکل ۱۲

حال اگر از F بر محور x ها عمود کنیم، نقطه $2^{\sqrt{2}}$ را روی محور نشان داده‌ایم (شکل ۱۳).
برای رسم عمود نیز از پرگار کمک می‌گیریم. پس نقطه $H = 2^{\sqrt{2}}$ نقطه مورد نظر مسئله است.



شکل ۱۳

π یک عدد گنگ و یک عدد متعالی است و نمی‌توانیم آن را به صورت دقیق روی محور نمایش دهیم. اما برای تعریف‌های زیادی تخمین زده‌اند؛ از جمله $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. ابتدا نشان می‌دهیم $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ یک عدد جبری است و سپس آن را روی محور عدهای حقیقی نمایش می‌دهیم (به کمک پرگار و رابطه فیثاغورس):

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow (x^2 - 5)^2 = 24 \Rightarrow x^4 - 10x^2 - 19 = 0.$$

پس واضح است که $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ عددی جبری است. برای نمایش $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ قطعاً روش‌های متعددی وجود دارند که در اینجا یکی از آن‌ها را ذکر می‌کنیم.

برای رسم مثلث قائم‌الزاویه به وتر $\sqrt{2}$ ، از ضلع‌های قائم ۱ و ۱، و وتر $\sqrt{3}$ از ضلع‌های قائم ۱، ۱ و ۱ استفاده می‌کنیم. می‌بینیم که ضلع قائم ۱ در هر دو مشترک است. پس می‌توان از این ضلع به عنوان

محور نشان داد و می‌دانیم نمایش عددهای غیرجبری به صورت دقیق امکان‌پذیر نیست.

برای مثال، عدد $2^{\sqrt{2}}$ یک عدد غیرجبری است؛ زیرا:

$$x = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow \log x = \sqrt{2} \log 2 \Rightarrow \log_2 x = \sqrt{2} \Rightarrow \log_2 x - \sqrt{2} = 0.$$

که این معادله با معادله چندجمله‌ای زیر:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

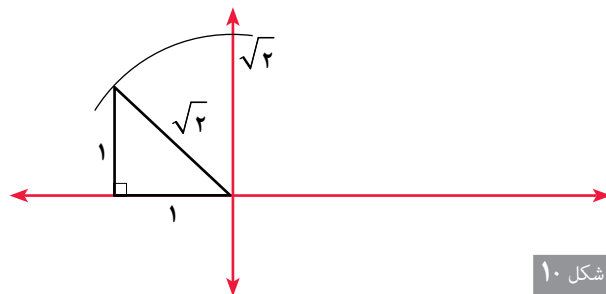
با ضرایب گویا یکی نیست. پس عدد $2^{\sqrt{2}}$ یک عدد متعالی است. اما

برای رسم تاحدی غیردقیق آن می‌توان از تلاقی نمودارهای زیر کمک گرفت:

$$x = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow \log_2 x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \log_2 x = \sqrt{2}$$

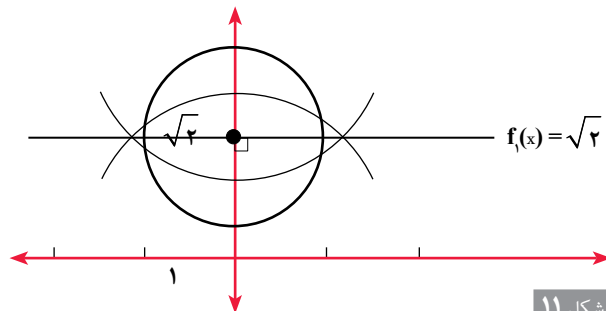
یعنی $2^{\sqrt{2}}$ محل تلاقی نمودارهای $f_1(x) = \sqrt{2}$ و $f_1(x) = \log_2 x$ است.

ابتدا مقدار $y = \sqrt{2}$ را پیدا می‌کنیم (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

اکنون نمودار $f_1(x) = \sqrt{2}$ را که خطی عمود بر محور y در نقطه $\sqrt{2}$ است، رسم می‌کنیم (شکل ۱۱):



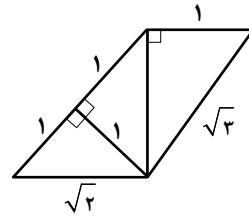
شکل ۱۱

نمودار $f_2(x) = \log_2 x$ را رسم می‌کنیم (قسمت غیردقیق

ترسیم در رسم تابع لگاریتم پیش می‌آید) و محل تلاقی این نمودار با

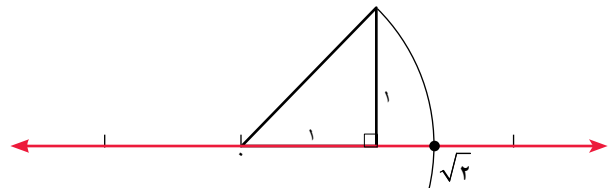
نمودار $f_1(x) = \sqrt{2}$ را مشخص می‌سازیم (شکل ۱۲).

ضلع مشترک استفاده کرد؛ مانند (شکل ۱۴).



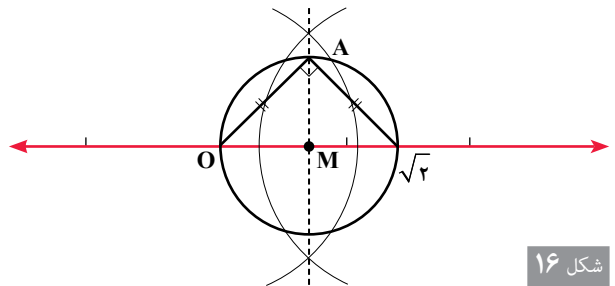
شکل ۱۴

برای رسم دقیق روی محور مراحل زیر را انجام می‌دهیم:
۱. $\sqrt{2}$ را روی محور نشان می‌دهیم. (شکل ۱۵)



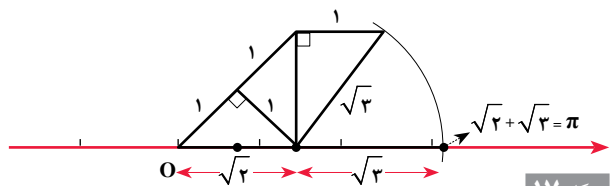
شکل ۱۵

۲. به کمک زاویهٔ محاطی مثلث قائم‌الزاویه‌ای به قطر $\sqrt{2}$ روی محور رسم می‌کنیم. در اینجا بعد از رسم عمودمنصف و پیدا کردن مرکز دایره (M) و رسم دایره به مرکزیت M و قطر $\sqrt{2}$ ، رأس قائم را محل تلاقی دایره و عمودمنصف قرار می‌دهیم تا مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با ساق‌های ۱ و ۱ حاصل شود. (شکل ۱۶)



شکل ۱۶

اکنون روی ضلع ۱ مثلث با وتر $\sqrt{2}$ ، ضلع قائم ۱ را سوار می‌کنیم تا به وتر $\sqrt{3}$ برسیم و کمان دلخواه را بزنیم. (شکل ۱۷)

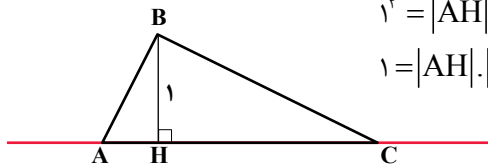


شکل ۱۷

سؤال جالبی که به ذهن خطور می‌کند، چنین است: «اگر عددی رسم‌پذیر باشد، آیا معکوس عدد نیز رسم‌پذیر می‌شود؟» رابطهٔ اصلی که یک عدد با معکوسش دارد، چنین است: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. با توجه

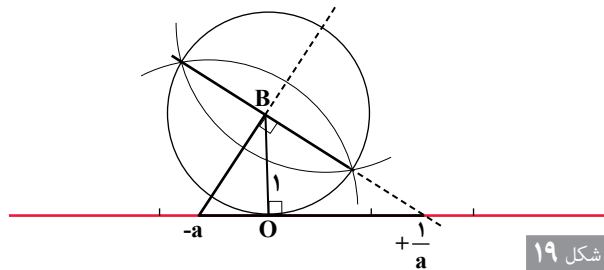
به اینکه برای رسم از مثلث قائم‌الزاویه و روابط طولی آن کمک می‌گیریم، رابطهٔ زیر راهگشای سؤال است:

$$\begin{aligned} |BH|^2 &= |AH| \cdot |HC| \\ 1^2 &= |AH| \cdot |HC| \Rightarrow \\ 1 &= |AH| \cdot |HC| \end{aligned}$$



شکل ۱۸

واضح است که $|AH|$ و $|HC|$ وارون یکدیگر هستند. اما برای نمایش معکوس یک عدد رسم‌پذیر روی محور، باید H را مبدأ مختصات در نظر بگیریم و طبق گام‌های زیر ادامه دهیم. دقت شود، چون در نمایش دو طرف مبدأ مختصات قرار می‌گیرند، پس این عددها قرینهٔ معکوس یکدیگر هستند که لازم است برای معکوس عدد، قرینهٔ عدد را نمایش دهیم:

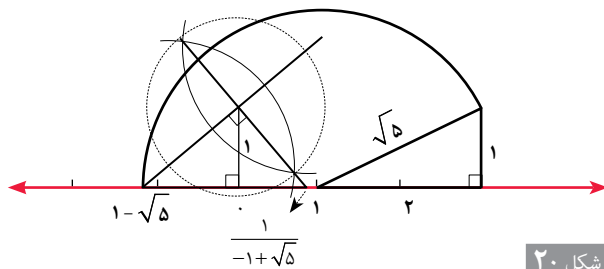


شکل ۱۹

۱. نمایش عدد رسم‌پذیر روی محور مختصات (برای مثال $-a$)؛
۲. رسم خط عمود BO به اندازهٔ یک واحد از مبدأ مختصات؛
۳. رسم خط عمود بر پاره‌خط واصل بین نقطه B و نقطه $-a$. محل تلاقی این خط و محور اعداد محل نمایش معکوس عدد رسم‌پذیر است.

مثال: معکوس عدد $1 + \sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید. ابتدا عدد $1 - \sqrt{5}$ را روی محور نمایش می‌دهیم.

سپس مراحل بالا را طی می‌کنیم تا به جواب سؤال، یعنی نمایش معکوس $1 + \sqrt{5}$ برسیم. (شکل ۲۰)



شکل ۲۰